

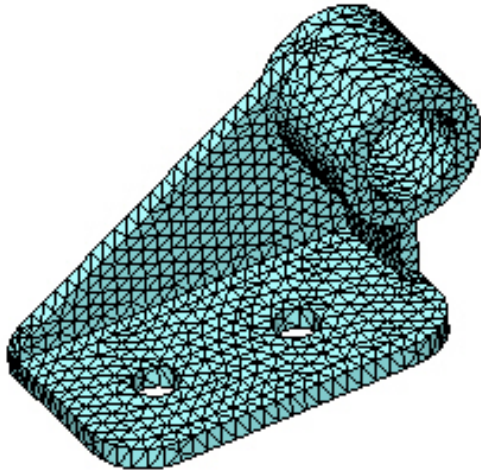
Oriented Particleを説明するための物理モデル

東京工業大学大学院

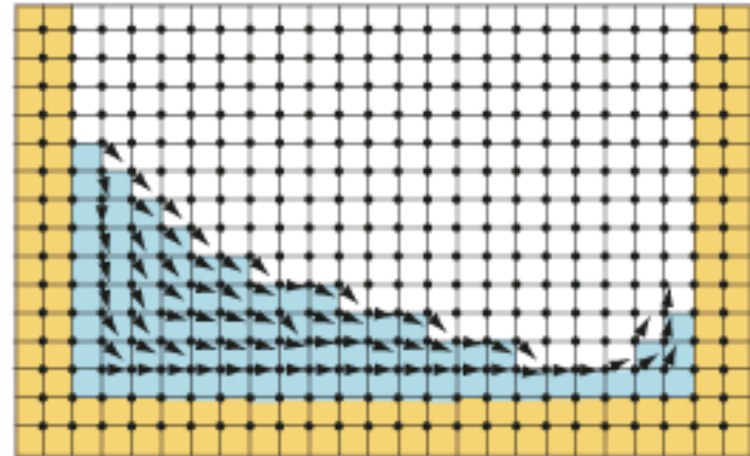
長谷川 晶一 研究室所属

日野 綾香

● 従来手法



有限要素法



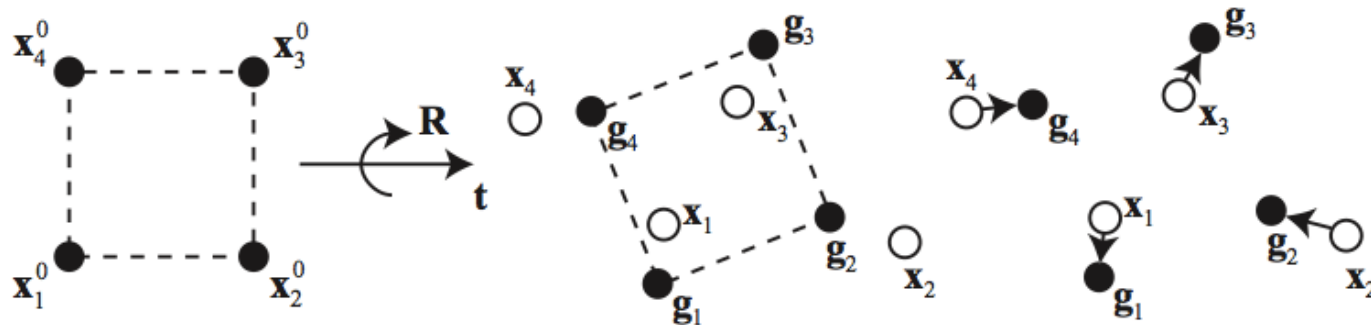
格子法

長所：空間と時間の解像度を上げれば解析解に収束するので、シミュレーションの精度がよい。

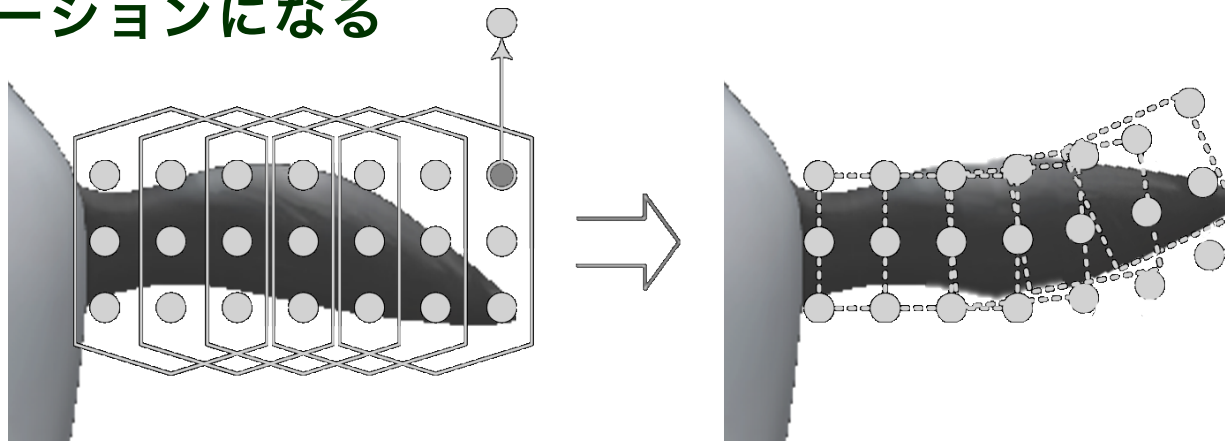
短所：大規模な行列計算に伴う計算量の増大。

Shape Matching[1]

- 変形と移動を分離し、目標位置(戻し先)を求める。



- 一つの頂点が複数のグループに属すると、柔軟変形のシミュレーションになる



Shape Matchingの性質

- 長所

- 計算量が少ない.

- 短所

- 幾何学的なアルゴリズムに基づくシミュレーション.
- 挙動を見ながらパラメータを調整.

リアルタイム処理を可能とする
Shape Matching法の提案



拡張

Oriented Particle (OP) [2]

- Shape Matching法の各粒子に向き情報を与える.
(各粒子が慣性行列を持つ)

アルゴリズムを物理モデルのシミュレーションとして解釈し、
その物理モデルの性質について考察する.

OPのグループ構造

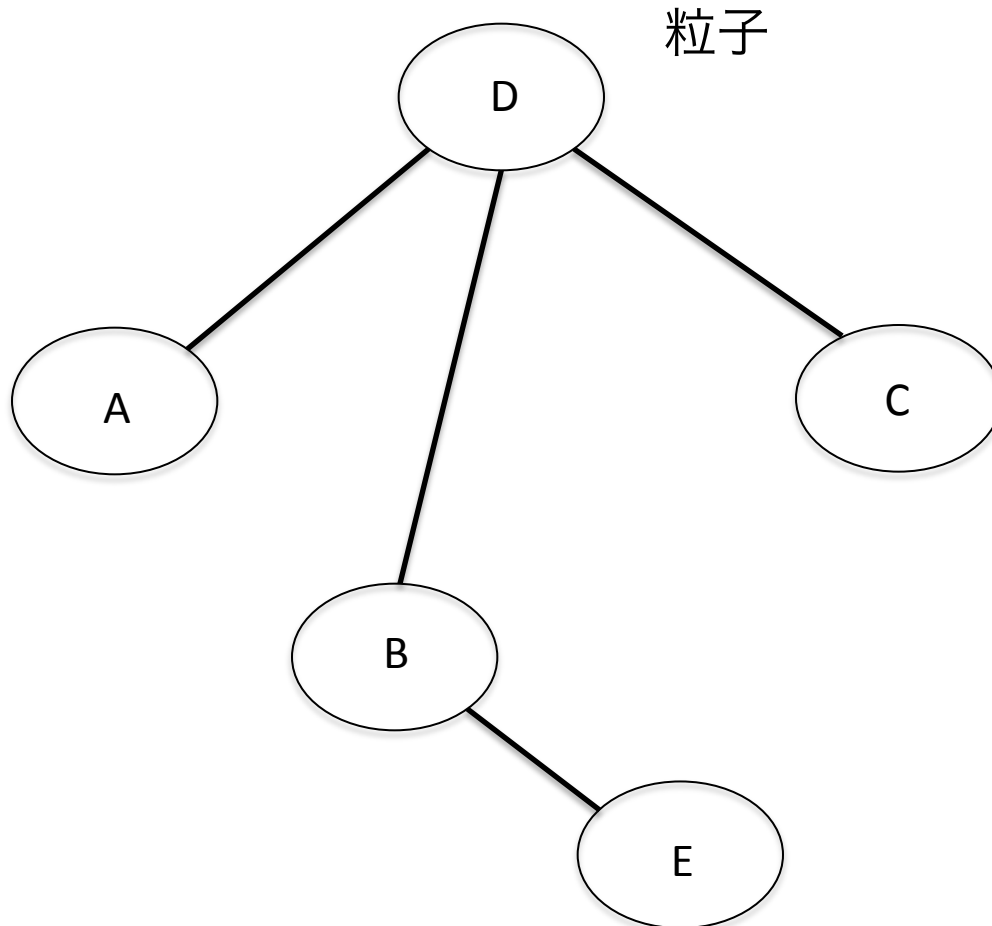
グループ

A - D

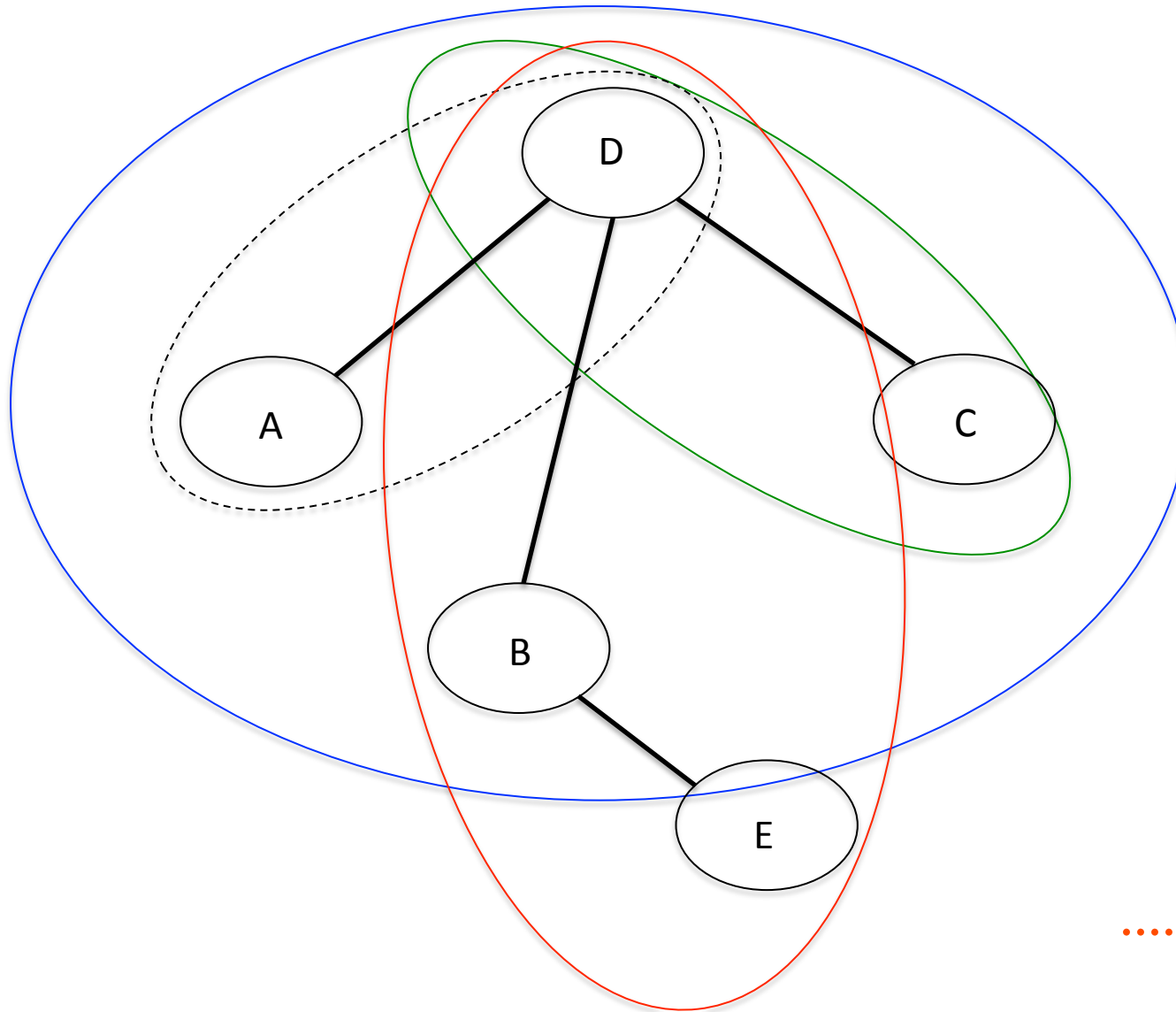
B $\begin{matrix} \diagup D \\ \diagdown E \end{matrix}$

C - D

$\begin{matrix} \diagup A \\ D - B \\ \diagdown C \end{matrix}$



OPのグループ構造



グループ

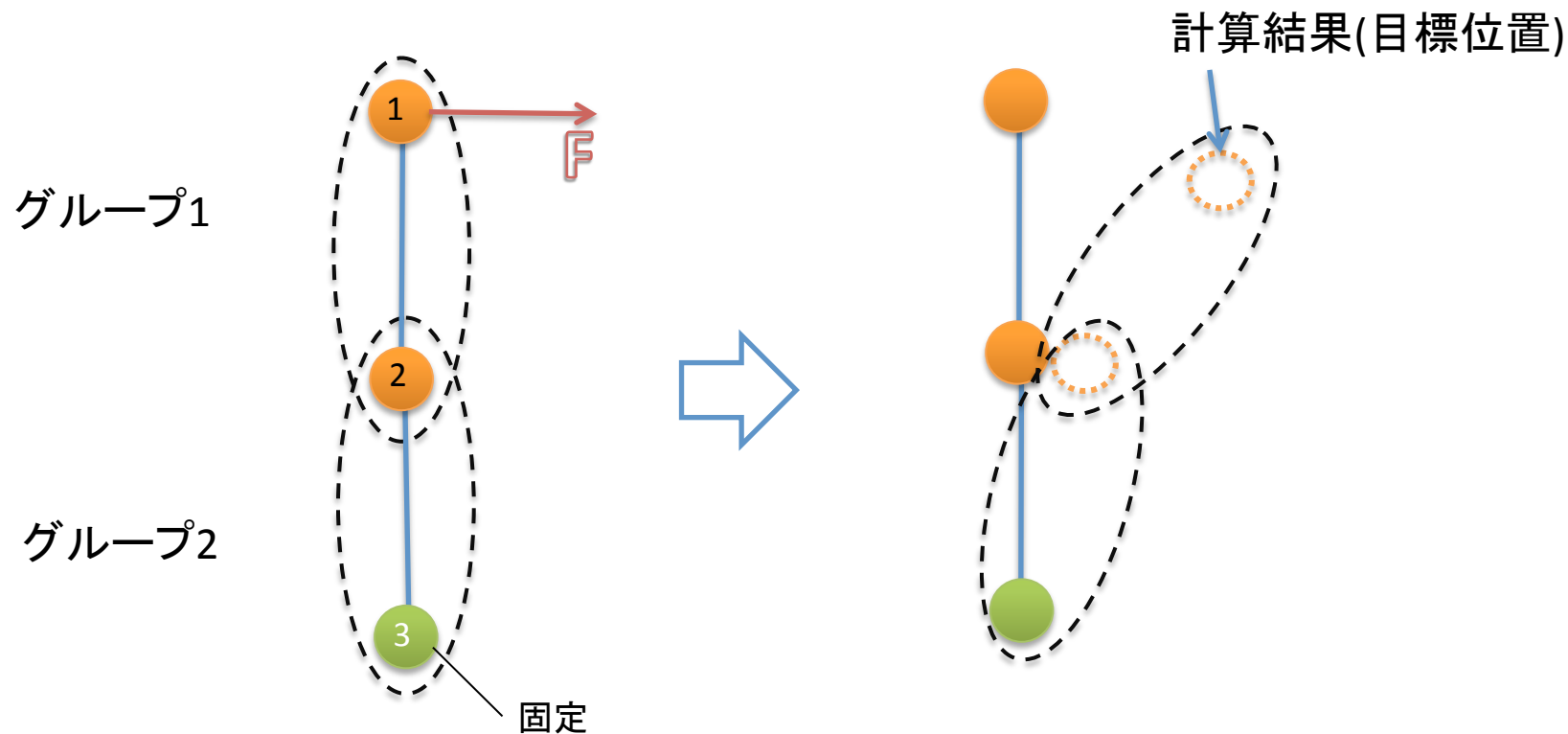
A - D

B $\begin{matrix} \diagup D \\ \diagdown E \end{matrix}$

C - D

$\begin{matrix} \diagup A \\ D - B \\ \diagdown C \end{matrix}$

OPの計算方法



外力を加え, 粒子が移動する.

OPのアルゴリズムの概略

1. 各粒子の移動目標位置をグループで求める.
目標位置とは, 初期位置から並進・回転させた位置
2. 全グループについて1を求める.
3. 粒子の目標位置に向かって動かす.
(粒子は一般に複数のグループに属する)

3は時間発展の計算手法であるので, 物理シミュレーションを行うことと同じ.

→1と2を説明する物理モデルを見つけない

OPのアルゴリズムの1についての数式 東工大長谷川研

Shape Matchingのグループkはn個の粒子から成っていると仮定する.

$\bar{\mathbf{x}}_i$: 初期位置 $\mathbf{x}_i$: 現在位置 m_i : 粒子自体の重さ

$\bar{\mathbf{c}}_k = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{x}}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$: 初期位置におけるグループkの重心位置

$\mathbf{c}_k = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$: 現在位置におけるグループkの重心位置

このとき, グループkにおけるmoment matrixは,

$$A_k = \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{x}_i \bar{\mathbf{x}}_i^T - m_i \mathbf{c}_k \bar{\mathbf{c}}_k^T)$$

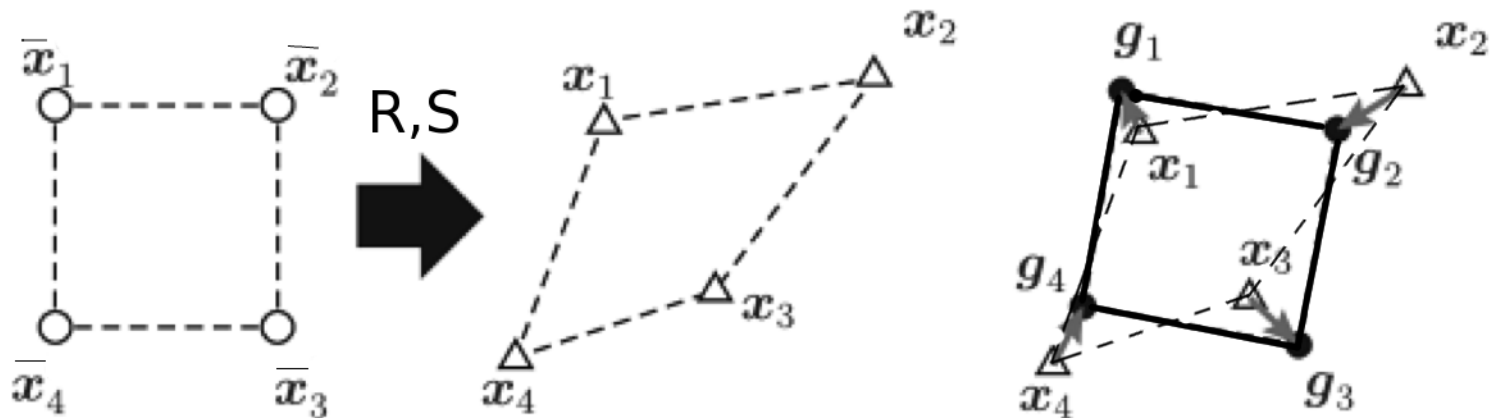
と表せる.

OPのアルゴリズムの1についての数式 東工大長谷川研

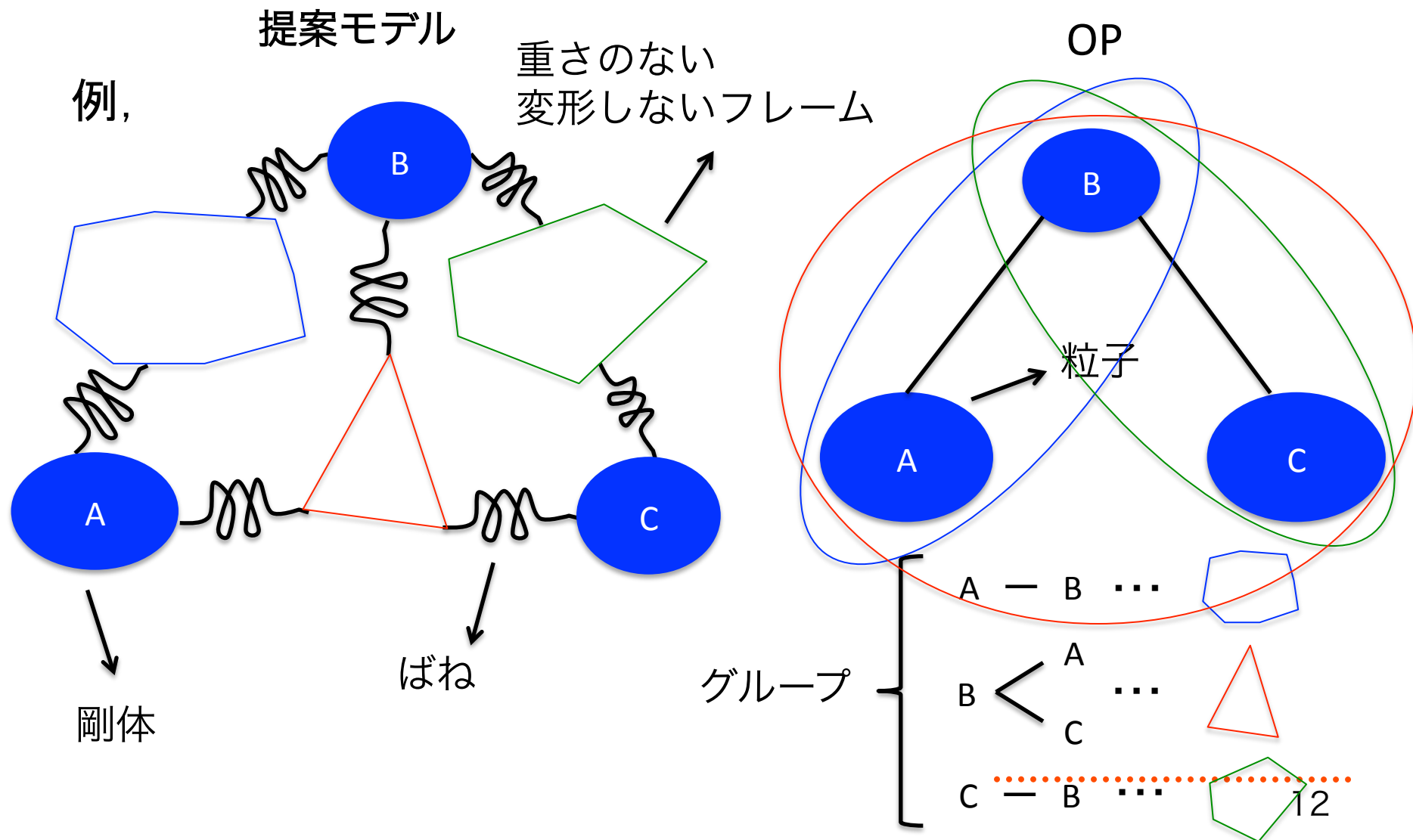
A_k に極分解を施し，回転行列 R_k と変形行列 S_k に分ける．
すると，各粒子の目標位置は，

$$g_i = R_k(\bar{x}_i - \bar{c}_k) + c_k$$

と書ける．これがOPのアルゴリズムである．



物理モデルの提案



- 示したいこと

- OPの目標位置と提案モデルの釣り合いの位置が一致することを示す.

- 提案モデルの釣り合い位置を求める.

- 提案モデルにおいて, $F_k = 0$ となる位置を求める.

- 提案モデルにおいて, $\tau_k = 0$ となる位置を求める.

- OPの式を変形させる

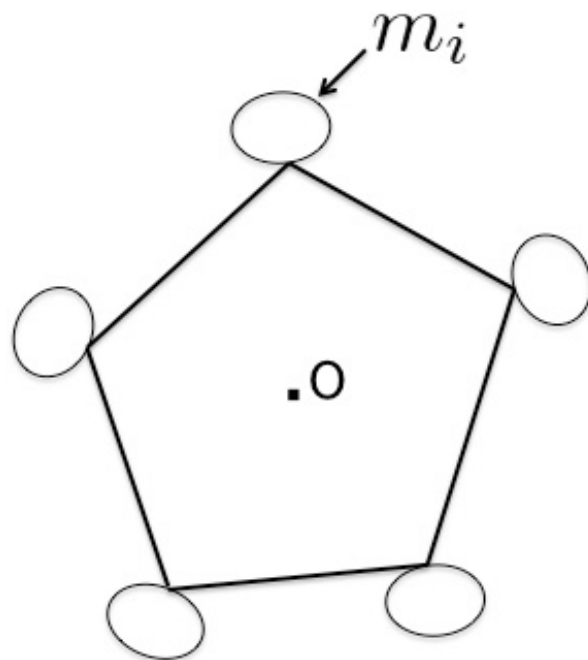
- OPの式 A_k をテンソル積を用いて表す.

- A_k を極分解し, S を求める.

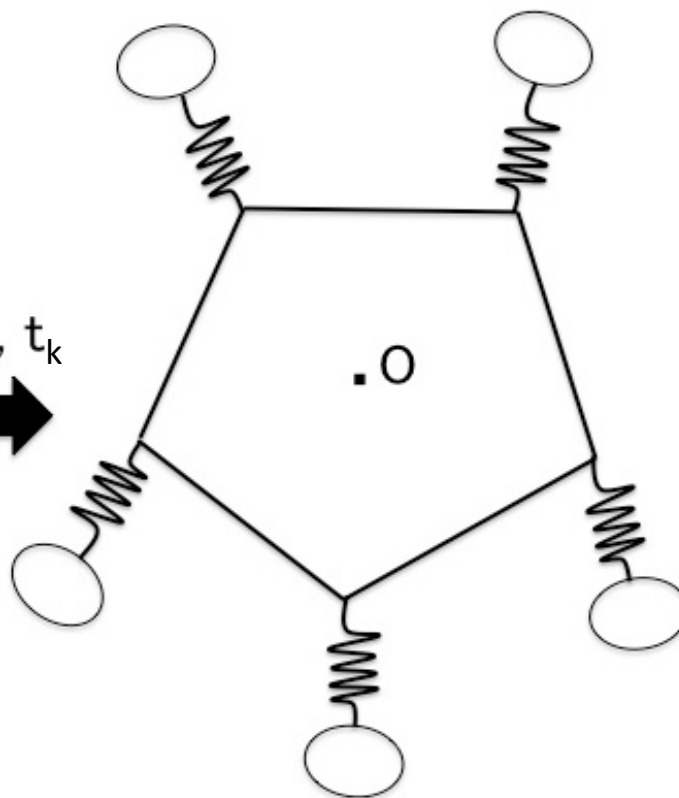
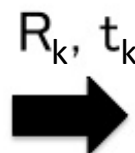
- テンソル積を外積表現にし, 外積が0であることを示す.

物理性の証明

- 初期のフレーム位置は回転・並進運動をし、現在位置に移動する。



粒子の初期位置 $\bar{x}_i$



粒子の現在位置 x_i

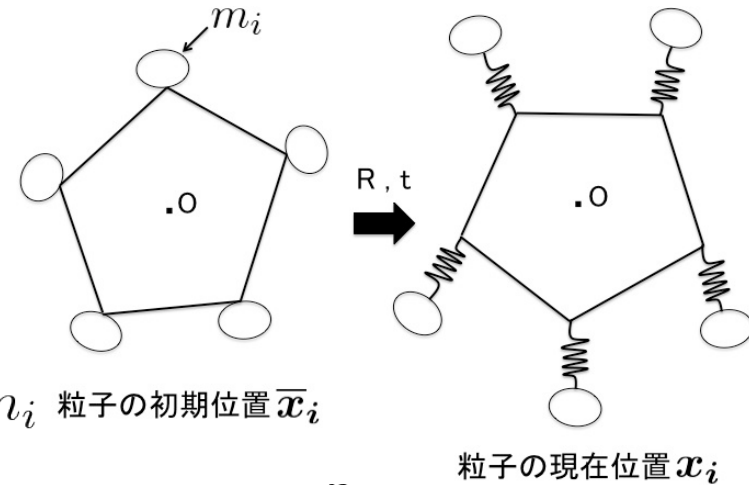
- 提案モデルにおいて, $F_k = 0$ となる位置を求める

フレームごとにおける合力 F_k は,

$$F_k = \sum_{i=1}^n m_i \{ \mathbf{x}_i - (R_k \bar{\mathbf{x}}_i + \mathbf{t}_k) \}$$

$$= \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{x}_i - R_k \sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{x}}_i - \mathbf{t}_k \sum_{i=1}^n m_i$$

粒子の初期位置 $\bar{\mathbf{x}}_i$



各フレームごとの初期位置の重心を回転中心とすると, $\sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{x}}_i = \mathbf{0}$

よって, F_k が0となる t_k は, $t_k = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$

これはOPにおける現在位置である.

- 示したいこと

- OPの目標位置と提案モデルの釣り合いの位置が一致することを示す.

- 提案モデルのつりありの位置を求める.

- ✓ 提案モデルにおいて, $F_k = 0$ となる位置を求める.

- 提案モデルにおいて, $\tau_k = 0$ となる位置を求める.

- OPの式を変形させる

- OPの式 A_k をテンソル積を用いて表す.

- A_k を極分解し, S を求める.

- テンソル積を外積表現にし, 外積が0であることを示す.

- 提案モデルにおいて, $\tau_k = 0$ となる位置を求める

□ 下準備として, OPの式を変形させてみる.

□ OPの式 A_k をテンソル積を用いて表す.

OPではmoment matrixは,

$$A_k = \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{x}_i \bar{\mathbf{x}}_i^T - m_i \mathbf{c}_k \bar{\mathbf{c}}_k^T)$$

と表せ, 重心座標系に書き表すと, $A_k = \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{x}_i \bar{\mathbf{x}}_i^T)$ となる.

テンソル積を用いると, $A_k = \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{x}_i \otimes \bar{\mathbf{x}}_i^T)$ となる.

□ A_k を極分解し S を求める.

A_k は回転行列 R と変形行列 S に極分解
することができ,

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{x}_i \otimes \overline{\mathbf{x}}_i^T) \\ &= RS \end{aligned}$$

となる. 両辺に左から R^{-1} をかけると,

$$\begin{aligned} R^{-1} A_k &= \sum_{i=1}^n (m_i (R^{-1} \mathbf{x}_i) \otimes \overline{\mathbf{x}}_i^T) \\ &= S \end{aligned}$$

行列 S は半正定値対称行列である.

□ テンソル積を外積表現にし，外積が0であることを示す.

$$\begin{aligned} R^{-1}A_k &= \sum_{i=1}^n (m_i(R^{-1}\mathbf{x}_i) \otimes \overline{\mathbf{x}}_i^T) \\ &= S \end{aligned}$$

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \text{ とすると, } S \text{ に対する外積は } S \text{ の対称性より,}$$

$$\begin{pmatrix} S_{23} - S_{32} \\ S_{31} - S_{13} \\ S_{12} - S_{21} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ となる.}$$

$\sum_{i=1}^n (m_i(R^{-1}\mathbf{x}_i) \otimes \bar{\mathbf{x}}_i^T)$ を外積表現にすると,

$\sum_{i=1}^n \{m_i(R^{-1}\mathbf{x}_i) \times \bar{\mathbf{x}}_i\}$ と表せる.

よって,

$$\sum_{i=1}^n \{m_i(R^{-1}\mathbf{x}_i) \times \bar{\mathbf{x}}_i\} = \mathbf{0}$$

- 示したいこと

OPの目標位置と提案モデルのつり合いの位置が一致することを示す.

- 提案モデルのつりありの位置を求める.

- ✓ 提案モデルにおいて, $F_k = 0$ となる位置を求める.

- 提案モデルにおいて, $\tau_k = 0$ となる位置を求める.

- ✓ OPの式を変形させる

- ✓ OPの式 A_k をテンソル積を用いて表す.

- ✓ A_k を極分解し, S を求める.

- ✓ テンソル積を外積表現にし, 外積が0であることを示す.

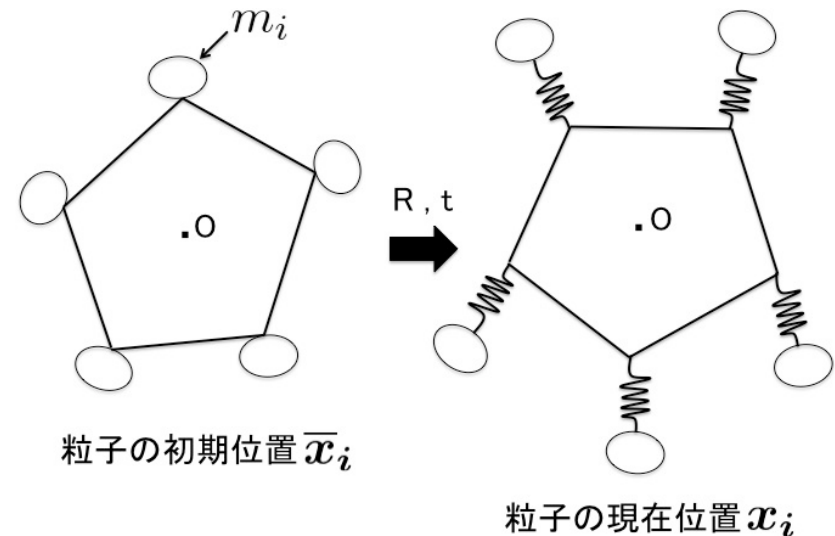
ある現在位置 $\mathbf{x}_i$ におけるバネが出すトルクの式は,

$$\begin{aligned}\tau_k &= \sum_{i=1}^n \{m_i(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_i) \times \bar{\mathbf{x}}_i\} \\ &= \sum_{i=1}^n \{(m_i \mathbf{x}_i) \times \bar{\mathbf{x}}_i\}\end{aligned}$$

ここで, 位置 $R^{-1}\mathbf{x}_i$ のトルクは,
OPの式を変形した結果から,

$$\sum_{i=1}^n \{m_i(R^{-1}\mathbf{x}_i) \times \bar{\mathbf{x}}_i\} = \mathbf{0}$$

となる.



初期位置のフレームが回転し,
現在の位置 $R\bar{x}_i$ に移動



同値

現在の位置が R^{-1} 回転(フレーム座標系)

(フレームが右に回転することと、位置が左に回転することは同じ)

よって、OPの式を変形した結果
$$\sum_{i=1}^n \{m_i(R^{-1}\mathbf{x}_i) \times \bar{\mathbf{x}}_i\} = \mathbf{0}$$

を加味すると、合力が0となる位置は $R\bar{x}_i$ である.

以上より，合力とトルクが0となる釣り合いの位置は，

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{R}_i \bar{\boldsymbol{x}}_i + \boldsymbol{t}_k \text{ である.}$$

ここでOPにおける目標位置も重心座標系にすると，

$$\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{R} \bar{\boldsymbol{x}}_i + \boldsymbol{c}_k$$

となり，OPの目標位置と提案モデルの釣り合いの位置が一致する.

向き情報がある場合

実は今までの議論では,
粒子自体は向き情報を持っていないと考えていた.

粒子に向き情報を含めて考える.

向き情報がある場合

OPのmoment matrixは

$$A_k = \sum_{i=1}^n (A_i + m_i \mathbf{x}_i \bar{\mathbf{x}}_i^T - m_i \mathbf{c}_i \bar{\mathbf{c}}_i^T)$$

$$A_i = \int_{V_{\mathbf{r}_i}} \rho_i(R_{A_i} \mathbf{x}_i) \mathbf{x}_i^T dV_{\mathbf{r}_i}$$

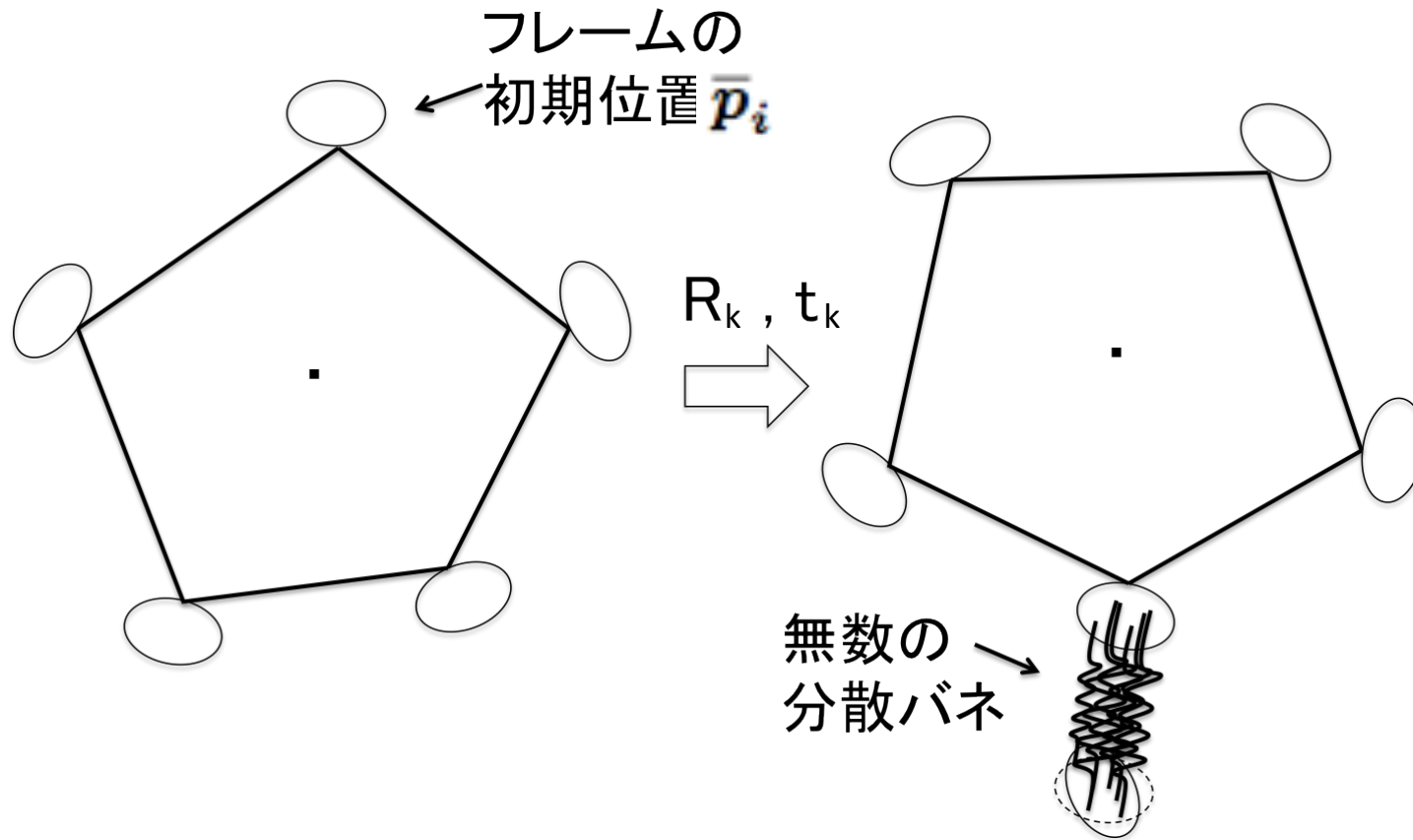
である。グローバル座標系から重心座標系に取り直し、極分解を行うと、

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{i=1}^n (A_i + m_i \mathbf{x}_i \bar{\mathbf{x}}_i^T) \\ &= R_k S_k \end{aligned}$$

とあらわすことができる。

向き情報がある場合の物理モデル

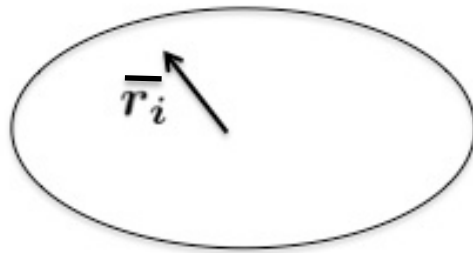
- 粒子自体の回転に着目



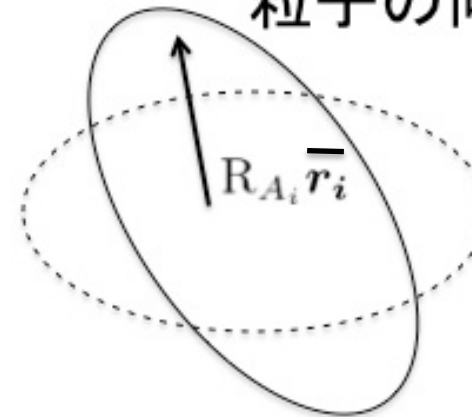
向き情報がある場合の物理モデル

- 粒子自体の回転に着目

初期位置における
粒子の向き $\bar{\mathbf{r}}_i$



現在位置における
粒子の向き $R_{A_i} \bar{\mathbf{r}}_i$

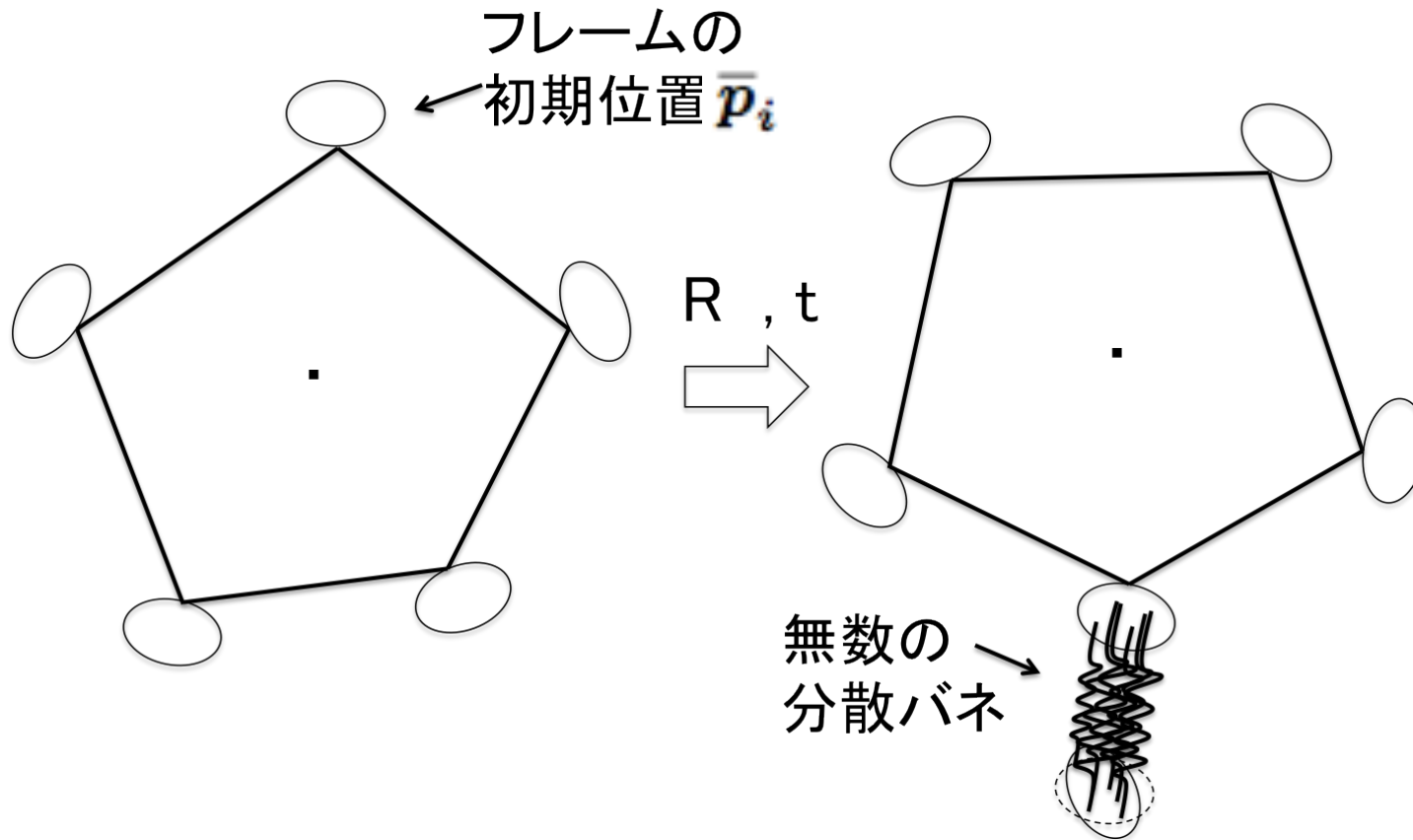


点線は元の位置, 実線は現在の位置

グローバル座標における現在位置は, $R_{A_i} \bar{\mathbf{r}}_i + \mathbf{p}_i$ である.

向き情報がある場合の物理モデル

- 粒子自体の回転に着目



向き情報がある場合

提案モデルにおいて,
バネが剛体に与えるトルクを表すテンソル積は,

$$A_i = \int_{V\mathbf{r}_i} \rho_i (R_{A_i} \bar{\mathbf{r}}_i + \mathbf{p}_i) \otimes (\bar{\mathbf{r}}_i + \bar{\mathbf{p}}_i)^T dV \mathbf{r}_i$$

この式を整理すると,

$$A_i = \int_{V\mathbf{r}_i} \rho_i (R_{A_i} \bar{\mathbf{r}}_i) \otimes \mathbf{r}_i^T dV \mathbf{r}_i + \int_{V\mathbf{r}_i} \rho_i \mathbf{p}_i \otimes \bar{\mathbf{p}}_i^T dV \mathbf{r}_i$$

ただし, $\int_{V\mathbf{r}_i} \rho_i (R_{A_i} \bar{\mathbf{r}}_i) \otimes \bar{\mathbf{p}}_i^T dV \mathbf{r}_i$ と $\int_{V\mathbf{r}_i} \rho_i \mathbf{p}_i \otimes \bar{\mathbf{r}}_i^T dV \mathbf{r}_i$

は楕円を位置ベクトルで積分すると考えられるので0となる.

向き情報がある場合

$$A_i = \int_{V\mathbf{r}_i} \rho_i(R_{A_i}\bar{\mathbf{r}}_i) \otimes \mathbf{r}_i^T dV\mathbf{r}_i + \int_{V\mathbf{r}_i} \rho_i\mathbf{p}_i \otimes \bar{\mathbf{p}}_i^T dV\mathbf{r}_i$$

$$\int_{V\mathbf{r}_i} \rho_i\mathbf{p}_i \otimes \bar{\mathbf{p}}_i^T dV\mathbf{r}_i \text{ はOPにおいて,}$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{x}_i \otimes \bar{\mathbf{x}}_i^T \text{ と表すことができる.}$$

よって、提案モデルとOPにおける式は一致する.

向き情報がある場合

提案モデルにおいて合力の式は,

$$\mathbf{F}_k = \int_{V\mathbf{r}_i} \rho_i [(\mathbf{R}_A \bar{\mathbf{r}}_i + \mathbf{p}_i) - \{\mathbf{R}_k(\bar{\mathbf{r}}_i + \bar{\mathbf{p}}_i) + \mathbf{t}_k\}] dV\mathbf{r}_i$$

ここで, OPの初期位置と現在位置の決め方と積分の性質から,

$$m_i = \int_{V\mathbf{r}_i} \rho_i dV\mathbf{r}_i, \bar{\mathbf{x}}_i = \bar{\mathbf{r}}_i + \bar{\mathbf{p}}_i$$

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{R}_A \bar{\mathbf{r}}_i + \mathbf{p}_i$$

なので, $\mathbf{F}_k = \sum_{i=1}^n m_i \{\mathbf{x}_i - (\mathbf{R}_k \bar{\mathbf{x}}_i + \mathbf{t}_k)\}$ に帰着できる.

以下, 先程と同様.

向き情報がある場合

提案モデルにおけるトルクの式は,

$$\begin{aligned}\tau_k &= \int_{V\mathbf{r}_i} [\rho_i \{ (R_A \bar{\mathbf{r}}_i + \mathbf{p}_i) - (\bar{\mathbf{r}}_i + \bar{\mathbf{p}}_i) \} \times (\bar{\mathbf{r}}_i + \bar{\mathbf{p}}_i)] dV\mathbf{r}_i \\ &= \int_{V\mathbf{r}_i} \rho_i (R_A \bar{\mathbf{r}}_i + \mathbf{p}_i) \times (\bar{\mathbf{r}}_i + \bar{\mathbf{p}}_i) dV\mathbf{r}_i\end{aligned}$$

ここで, OP の初期位置と現在位置の決め方と積分の性質から,

$$m_i = \int_{V\mathbf{r}_i} \rho_i dV\mathbf{r}_i, \bar{\mathbf{x}}_i = \bar{\mathbf{r}}_i + \bar{\mathbf{p}}_i$$

$$\mathbf{x}_i = R_A \bar{\mathbf{r}}_i + \mathbf{p}_i$$

なので $\tau_k = \sum_{i=1}^n \{ (m_i \mathbf{x}_i) \times \bar{\mathbf{x}}_i \}$ に帰着できる.

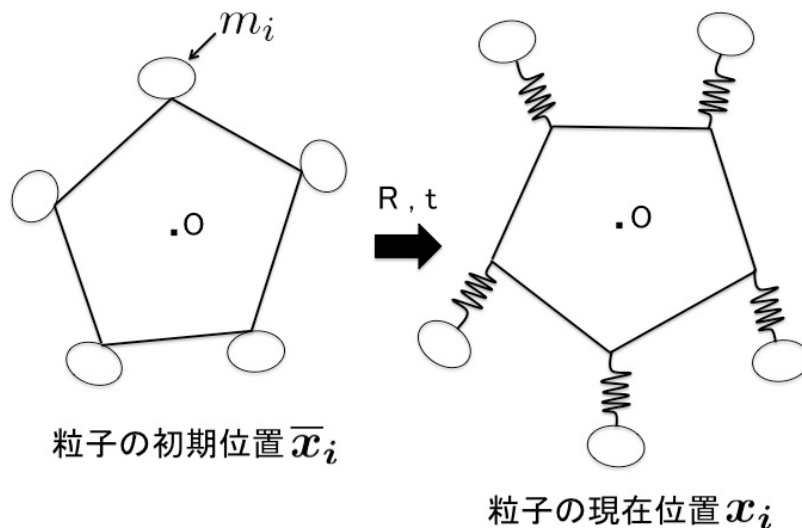
以下, 先程と同様.

よって, 合力もトルクについても前半部分の証明と同様.

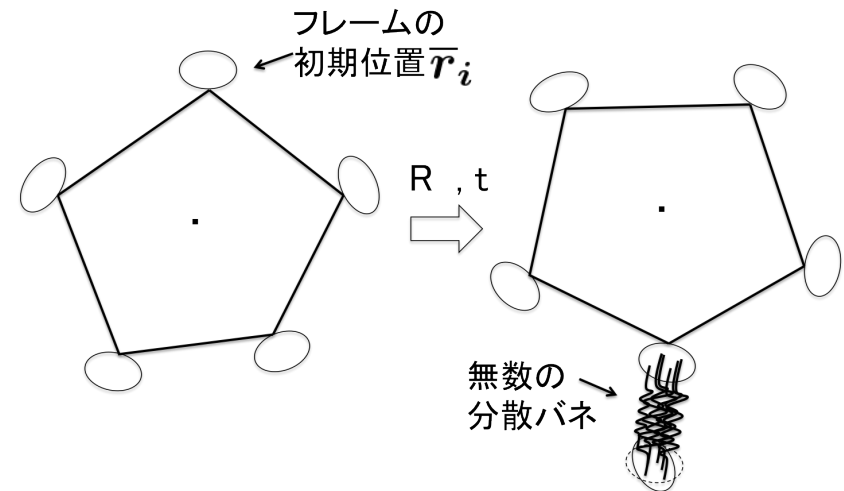
- OPのアルゴリズムの紹介
- OPを説明するための物理モデル

提案モデルの釣り合いの位置とOPの目標位置が一致

向き情報がない場合



向き情報がある場合



➡ OPはこのようなモデルのシミュレーションをしていることと同値

今後の課題

● FEMとパラメータ同定

OPのパラメータ

物体の柔らかさを決める係数 α

繰り返し計算回数 n

各グループを構成する粒子の連結数

提案モデルとOPのパラメータを同定させたい。